

Grupo I

	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	D	C	B	A	C	A	C
Versão 2	C	B	D	B	C	A	D	A

Grupo II

1.1.

$$z^3 + z_1 = z_2 \Leftrightarrow z^3 = 6 + 11i - (-2 + 11i) \Leftrightarrow z^3 = 8 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8 \operatorname{cis} 0} \Leftrightarrow z = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{2k\pi}{3} \right), k \in \mathbb{Z} .$$

As 3 raízes distintas são:

$$z_1 = 2 \operatorname{cis} 0, z_2 = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{2}{3} \pi \right), z_3 = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{4}{3} \pi \right)$$

Cálculo auxiliar 1

$$(-2 + i)^3 = (-2 + i)^2 (-2 + i) = (4 - 4i - 1)(-2 + i) = (3 - 4i)(-2 + i) = -6 + 3i + 8i + 4 = -2 + 11i$$

Cálculo auxiliar 2

$$\frac{1 + 28i}{2 + i} = \frac{(1 + 28i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{2 - i + 56i + 28}{2^2 + 1^2} = \frac{30 + 55i}{5} = 6 + 11i$$

1.2. $w \neq 0$ Se w e $\frac{1}{w}$ são raízes de índice n de um mesmo número complexo z , então

$$z = w^n = \left(\frac{1}{w} \right)^n$$

$$\text{e assim vem que } w^n = \left(\frac{1}{w} \right)^n \Leftrightarrow w^{2n} = 1 \Leftrightarrow (w^n)^2 = 1 \Leftrightarrow w^n = -1 \vee w^n = 1 \Leftrightarrow z = -1 \vee z = 1$$

2) F: "ser rapariga"

P: "ter excesso de peso"

$$P(F) = 0,55 \Rightarrow P(\bar{F}) = 1 - 0,55 = 0,45$$

$$P(\bar{P}|\bar{F}) = 0,4 \Rightarrow P(P|\bar{F}) = 1 - 0,4 = 0,6$$

$$P(P) = P(P|F)P(F) + P(P|\bar{F})P(\bar{F}) = 0,55 \times 0,3 + 0,6 \times 0,45 = 0,435.$$

2.1)

$$P(\bar{F}|P) = \frac{P(\bar{F} \cap P)}{P(P)} = \frac{P(\bar{F}) \times P(P|\bar{F})}{P(P)} = \frac{0,45 \times 0,6}{0,435} = \frac{18}{29}.$$

2.2)

Como são 200 alunos temos 110 raparigas ($0,55 \times 200$) e 90 rapazes.

$$P(\text{serem escolhidos duas raparigas e um rapaz}) = \frac{{}^{110}C_2 \times 90}{{}^{200}C_3} \approx 0,41$$

3. Como se vão extrair, em simultâneo, 4 bolas do saco então só poderão acontecer duas situações: extrairmos a bola com o número 0 com outras 3 bolas ou extrairmos 4 bolas com números diferentes de zero. Assim, na primeira situação, o produto dos números inscritos nas bolas extraídas é zero e, na segunda situação, o produto é quatro pelo que a variável X só poderá assumir os valores 0 e 4, respetivamente.

A probabilidade de X tomar o valor 0 é dada por $\frac{{}^4C_3}{{}^5C_4} = \frac{4}{5}$

- número de casos possíveis: das 5 bolas escolher 4: 5C_4
- número de casos favoráveis: das 4 bolas com números diferentes de zero escolher 3 e escolher a bola com o número zero.

A probabilidade de X assumir o valor 4 é dada por: $\frac{{}^4C_4}{{}^5C_4} = \frac{1}{5}$

n.º de casos possíveis : (já foi explicado)

n.º de casos favoráveis: das 4 bolas com números diferentes de zero escolho os 4.

4.

4.1.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - (4e^{-x} + 4) = 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{4}{e^x} - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 4e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}) \quad (y = e^x)$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4 - \sqrt{32}}{2} \vee y = \frac{4 + \sqrt{32}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 2 - 2\sqrt{2} \vee y = 2 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = 2 - 2\sqrt{2} \vee e^x = 2 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

c. impossível, pois $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e $2 - 2\sqrt{2} < 0$

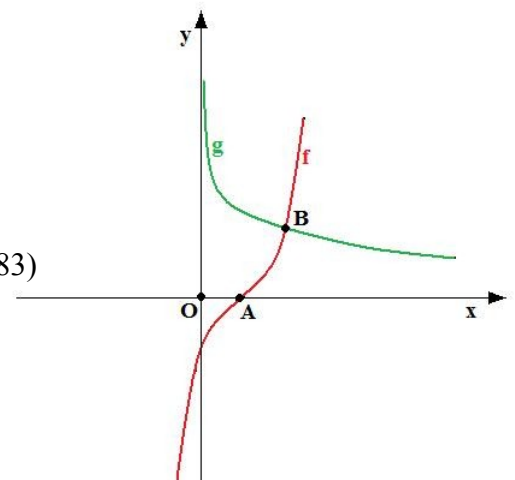
$$\Leftrightarrow x = \ln(2 + 2\sqrt{2})$$

$\therefore \ln(2 + 2\sqrt{2})$ é o único zero de f .

4.2) Abcissa do ponto A: $\ln(2 + 2\sqrt{2}) \approx 1,57$ B(3,22; 2,83)

Altura do Triângulo $\approx 2,83$; Base do Triângulo $\approx 1,57$

$$A_{[OAB]} \approx \frac{1,57 \times 2,83}{2} \approx 2,2$$



5.

$$5.1. \quad m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^{1-x}}{x} = e^{+\infty} = +\infty \notin \mathbb{R}$$

Logo o gráfico não tem Assíntotas não verticais quando $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x+1) - x \ln(x) + 3x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1) - \ln(x)) + 3 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] + 3 = \ln 1 + 3 = 0 + 3 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x \ln(x+1) - x \ln(x) + 3x - 3x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x \ln(x+1) - x \ln(x))] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \right) \\ &= \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} \right) = 1 \end{aligned}$$

onde se fez a mudança de variável $y = \frac{1}{x}$ e se reconheceu um limite notável.

Conclusão: $y = 3x + 1$ é a equação da Assíntota oblíqua do gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$

$$5.2. \quad f'(x) = (x e^{1-x})' = e^{1-x} + (-x e^{1-x}) = e^{1-x}(1-x), \quad \forall x < 0$$

$$f'(-1) = 2e^2; \quad f(-1) = -e^2$$

$$\begin{aligned}
 y - f(-1) &= f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow y &= 2e^2(x+1) - e^2 \\
 \Leftrightarrow y &= 2e^2x + e^2 \text{ é a equação pretendida.}
 \end{aligned}$$

6.1.

$$\begin{aligned}
 P(\alpha) &= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = \\
 &= 1 - \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} + 1 + 1 + \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \\
 &= 3 + \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}, \forall \alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[
 \end{aligned}$$

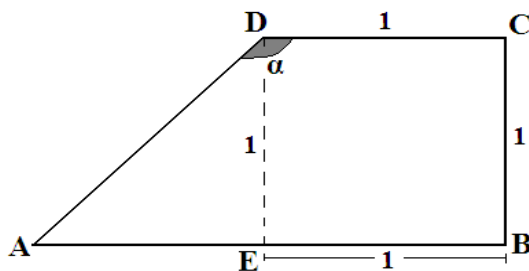


Figura 5

A amplitude, em radianos, do ângulo BAD é

$$2\pi - (\alpha + \pi) = \pi - \alpha, \alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$$

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \operatorname{sen}(\pi - \alpha) \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}, \alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$$

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) \Leftrightarrow \overline{AE} = \frac{1}{-\operatorname{tg} \alpha}, \alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$$

Conclusão: $\overline{AB} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + 1 = 1 - \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}, \alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$

6.2) $\tan \theta = -\sqrt{8}, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$$\begin{aligned}
 P'(\alpha) &= \frac{(1 - \cos \alpha)' \operatorname{sen} \alpha - (\operatorname{sen} \alpha)' (1 - \cos \alpha)}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \\
 &= \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha}, \forall \alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[
 \end{aligned}$$

$$P'(\theta) = \frac{1 - \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)^2} = \frac{3}{2}$$

C.A.:

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos \theta = -\frac{1}{3}$$

($\theta \in 2^\circ\text{Q}$ *assim* $\cos \theta < 0$)

$$\operatorname{sen} \theta = \cos \theta \times \operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{8}}{3}$$