

**Proposta de Resolução da Sociedade Portuguesa de Matemática
para o Exame Nacional de Matemática A
Prova 635, 2ª fase – 27 de Julho de 2011**

Grupo I

	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	D	B	D	A	C	B	C
Versão 2	C	A	C	A	B	D	B	B

Grupo II

1.

1.1

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{z_1 \times i^{4n+3} - b}{\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{5}{4}\pi\right)} = \frac{(1+2i) \times (i^4)^n \times i^3 - b}{\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right) \right]} = \frac{(1+2i)(-i) - b}{\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)} = \frac{-i - 2i^2 - b}{-1-i} = \\
 &= \frac{2-b-i}{-1-i} = \frac{[(2-b)-i](-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{-(2-b)+i+(2-b)i-i^2}{1+1} = \frac{-2+b+i+2i-bi+1}{2} = \\
 &= \frac{-1+b}{2} + \frac{(3-b)}{2}i.
 \end{aligned}$$

O complexo w é um número real se e só se a sua parte imaginária é nula, ou seja, se $b = 3$.

1.2

Tem-se

$$\begin{aligned}
 |1+z|^2 + |1-z|^2 &= (1+z)(\overline{1+z}) + (1-z)(\overline{1-z}) = (1+z)(\bar{1} + \bar{z}) + (1-z)(\bar{1} - \bar{z}) = \\
 &= 1 + \bar{z} + z + z \times \bar{z} + 1 - \bar{z} - z + z \times \bar{z} = 2|z|^2 + 1 + 1 = 4
 \end{aligned}$$

uma vez que $z \times \bar{z} = |z|^2 = 1$.

2.

2.1 Sejam L e I os acontecimentos “ser licenciado” e “ter idade inferior a 40 anos” respectivamente.

Tem-se

$$P(L) = 0,6 \text{ pelo que } P(\bar{L}) = 1 - 0,6 = 0,4.$$

Sabemos também do enunciado que:

$$P(I | L) = 0,8$$

$$P(I | \bar{L}) = 0,1.$$

Da definição de probabilidade condicionada vem

$$P(L \cap I) = P(L) \times P(I | L) = 0,48$$

$$P(\bar{L} \cap I) = P(\bar{L}) \times P(I | \bar{L}) = 0,4 \times 0,1 = 0,04,$$

pelo que $P(I) = P(L \cap I) + P(\bar{L} \cap I) = 0,48 + 0,04 = 0,52$.

Finalmente, a probabilidade de um funcionário escolhido ao acaso ser licenciado sabendo que tem idade não inferior a 40 anos é dada por

$$P(L | \bar{I}) = \frac{P(L \cap \bar{I})}{P(\bar{I})} = \frac{P(L) - P(L \cap I)}{1 - P(I)} = \frac{0,6 - 0,48}{1 - 0,52} = \frac{1}{4}.$$

2.2 A resposta correcta é a II. De facto, pretende-se que de entre os três funcionários escolhidos pelo menos dois estejam a favor do novo horário. Podemos decompor esta prerrogativa da seguinte forma:

- os três membros da equipa estão a favor. É possível formar 9C_3 destas equipas.

- dois e apenas dois membros da equipa estão a favor, estando o terceiro contra ou indeciso. Existem ${}^6C_1 \times {}^9C_2 = 6 \times {}^9C_2$ equipas nestas condições.

Sendo estas duas situações disjuntas, a resposta final é dada por: $6 \times {}^9C_2 + {}^9C_3$.

A resposta I não está correcta: o número de equipas de três elementos que se podem formar com 15 indivíduos é ${}^{15}C_3$. Por outro lado, existem 6C_3 equipas em que nenhum funcionário concorda com o novo horário de trabalho (estando portanto contra ou indeciso). Assim, a diferença ${}^{15}C_3 - {}^6C_3$ contabiliza o número de equipas em que pelo menos um elemento concorda com o novo horário. Esta resposta estaria correcta se a este número se subtraísse o número de equipas que contêm um e apenas um funcionário a favor, ou seja ${}^6C_2 \times 9$. Estaria portanto correcta a resposta ${}^{15}C_3 - {}^6C_3 - {}^6C_2 \times 9$.

3.

3.1. O aumento em questão é dado por:

$$N_A(7) - N_A(0) = \frac{120}{1 + 7 \times e^{-1,4}} - \frac{120}{1 + 7} \approx 29$$

O aumento foi de, aproximadamente, 29 nenúfares.

3.2.

$$N_A(t) = N_B(t) \wedge t \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{120}{1 + 7 \times e^{-0,2t}} = \frac{150}{1 + 50 \times e^{-0,4t}} \wedge t \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12(1 + 50e^{-0,4t}) = 15(1 + 7e^{-0,2t}) \wedge t \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 600(e^{-0,2t})^2 - 105e^{-0,2t} - 3 = 0 \wedge t \geq 0.$$

Definindo $x = e^{-0,2t}$ obtém-se a equação do 2º grau

$$600x^2 - 105x - 3 = 0, \text{ cujas soluções são } x = \frac{1}{5} \text{ e } x = -\frac{1}{40} \text{ que correspondem}$$

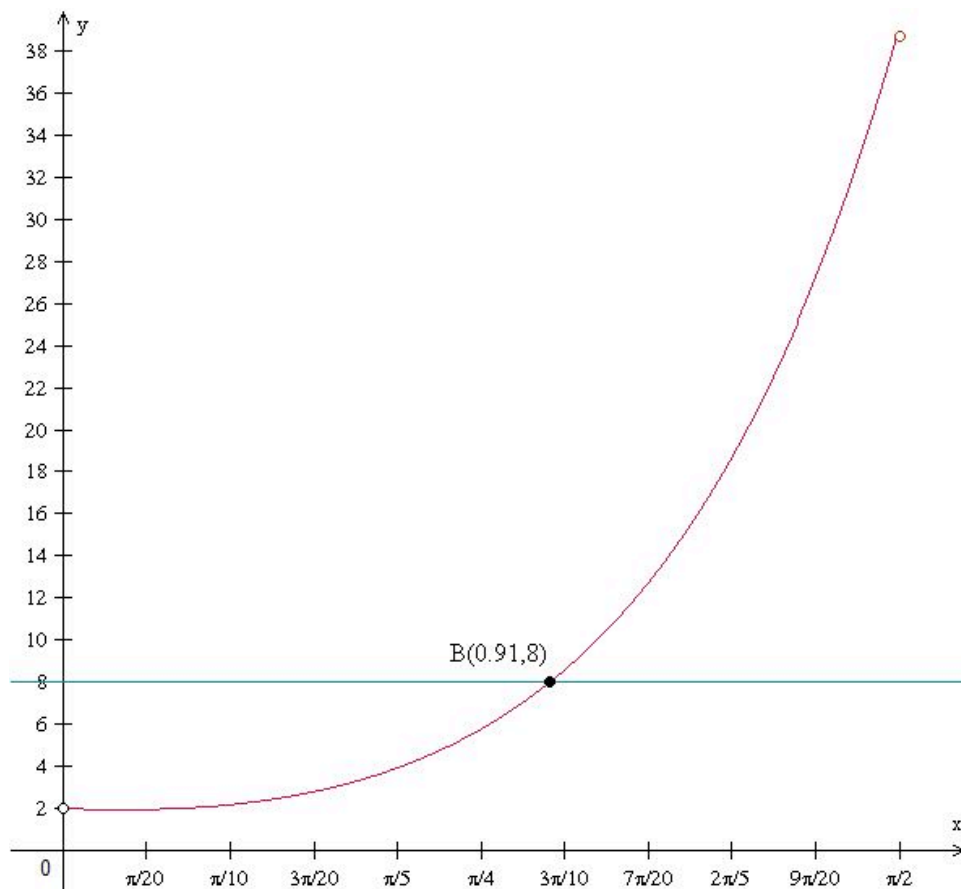
$$\text{em termos da variável } t, \text{ a } e^{-0,2t} = \frac{1}{5} \text{ e } e^{-0,2t} = -\frac{1}{40}.$$

Sendo a exponencial uma função positiva, a segunda equação não tem solução. Obtemos portanto

$$e^{-0,2t} = \frac{1}{5} \wedge t \geq 0 \Leftrightarrow -0,2t = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \wedge t \geq 0 \Leftrightarrow t = 5 \ln 5 \approx 8.$$

Foram então necessários, aproximadamente, 8 dias.

4. $f'(x) = 8 \Leftrightarrow 2e^{2x} - \operatorname{sen} x - 4x = 8$



R: A abcissa do ponto B é aproximadamente 0,91.

5.

5.1. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{2-x} - 1}{x - 2} = - \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{2-x} - 1}{2 - x} = - \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = -1$, onde se fez a mudança de variável $y = 2 - x$. Sendo este limite finito não há A.V. quando $x \rightarrow 2^-$.

Por outro lado $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{\ln(x+1)} = \frac{3}{\ln(3)} \in \mathbb{R}$, pelo que também não existe A. V. quando $x \rightarrow 2^+$.

\therefore O gráfico de f não tem A. V. quando $x \rightarrow 2$.

\therefore O gráfico de f não tem A. V. em $[0, +\infty[\setminus \{2\}$ pois f é contínua nesse conjunto.

\therefore Assim o gráfico de f não tem A. V. em $[0, +\infty[$.

5.2. A função f é contínua em $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, pois f é contínua em $[0, 2[$.

$$\left(\left[0, \frac{1}{2}\right] \subset [0, 2[\right).$$

$$f(0) = \frac{e^2 - 1}{-2} \approx -3,19 \text{ e } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\frac{3}{2}} - 1}{-\frac{3}{2}} \approx -2,32.$$

Logo $-3 \in \left]f(0), f\left(\frac{1}{2}\right)\right[$ e assim pelo Teorema de Bolzano

$$\exists c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[: f(c) = -3.$$

5.3.

f é diferenciável em $]2, +\infty[$ e tem-se neste intervalo

$$f'(x) = \frac{(x+1)' \ln(x+1) - (\ln(x+1))'(x+1)}{(\ln(x+1))^2} = \frac{\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}(x+1)}{(\ln(x+1))^2} = \frac{\ln(x+1) - 1}{(\ln(x+1))^2}.$$

Para $x > 2$, $x+1 > 3 > e$ pelo que, sendo \ln uma função crescente $\ln(x+1) > \ln e$, ou seja, $\ln(x+1) > 1$.

Assim, no intervalo considerado, $\ln(x+1) - 1 > 0$, $(\ln(x+1))^2 > 0$.

Conclui-se que $f'(x) > 0$ em $]2, +\infty[$ logo f é estritamente crescente neste intervalo.

6. Tem-se para todo $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = -a \operatorname{sen}(nx) + b n \cos(nx)$$

$$f''(x) = -a n^2 \cos(nx) - b n^2 \operatorname{sen}(nx) = -n^2 (a \cos(nx) + b \operatorname{sen}(nx)) = -n^2 f(x).$$

Desta forma, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ tem-se $f''(x) + n^2 f(x) = 0$.