

**Proposta de Resolução da Sociedade Portuguesa de Matemática  
para o Exame Nacional de Matemática A  
Prova 635, 1ª Chamada – 21 de Junho de 2010**

**Grupo I**

	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>
<b>Versão 1</b>	B	C	B	A	C	A	D	B
<b>Versão 2</b>	C	B	C	D	B	D	A	C

**Grupo II**

**1.1.**

$$w = \frac{3 - i \left( \text{cis} \left( \frac{\pi}{7} \right) \right)^7}{2 - i} = \frac{3 - i \cdot \text{cis}(\pi)}{2 - i} = \frac{3 - i \cdot (-1)}{2 - i} = \frac{3 + i}{2 - i} = \frac{(3 + i) \cdot (2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{6 + 3i + 2i - 1}{2^2 + 1^2} =$$

$$= 1 + i = \sqrt{2} \cdot \text{cis} \frac{\pi}{4}.$$

**1.2.**  $z_1 = \text{cis} \left( \frac{\pi}{7} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{7} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{7} \right)$

$$|z_1 + z_2|^2 = \left( 2 + \cos \frac{\pi}{7} \right)^2 + \left( 1 + \sin \frac{\pi}{7} \right)^2 = 4 + 4 \cos \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{\pi}{7} + 1 + 2 \sin \frac{\pi}{7} + \sin^2 \frac{\pi}{7} =$$

$$= \sin^2 \left( \frac{\pi}{7} \right) + \cos^2 \left( \frac{\pi}{7} \right) + 5 + 2 \sin \left( \frac{\pi}{7} \right) + 4 \cos \left( \frac{\pi}{7} \right) = 1 + 5 + 2 \sin \left( \frac{\pi}{7} \right) + 4 \cos \left( \frac{\pi}{7} \right) =$$

$$= 6 + 2 \sin \left( \frac{\pi}{7} \right) + 4 \cos \left( \frac{\pi}{7} \right) \quad \text{c.q.d.}$$

**2.1.** No universo formado pelo conjunto dos alunos da escola, sejam os acontecimentos:

A: “o aluno tem computador portátil”

B:” o aluno sabe o nome do director”

$$P(A) = \frac{1}{5}; \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad \text{sendo} \quad P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|\bar{B}) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$$

$$\text{Assim, } P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{30} = \frac{7}{15}.$$

**2.2.** Número de alunos que têm computador portátil:  $\frac{1}{5} \times 150 = 30$

Assim há  ${}^{30}C_4 \times {}^{120}C_2 = 195671700$  maneiras diferentes de se formar uma comissão nas condições pretendidas.

**3.** A regra de Laplace diz-nos que a probabilidade de um acontecimento é calculada pelo quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis, sendo estes todos equiprováveis.

O número total de extracções é dado por  ${}^{18}C_2$ , que representa o número de maneiras possíveis de escolher 2 bolas de entre 18.

Por outro lado, existem  ${}^{12}C_2$  pares possíveis de bolas azuis e  ${}^6C_2$  pares de bolas vermelhas. Assim, o número total de pares de bolas da mesma cor é dado por  ${}^{12}C_2 + {}^6C_2$ , o que corresponde ao número total de tiragens favoráveis.

Finalmente, pela regra de Laplace, a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{{}^{12}C_2 + {}^6C_2}{{}^{18}C_2} = \frac{\frac{12 \times 11}{2} + \frac{6 \times 5}{2}}{\frac{18 \times 17}{2}} = \frac{12 \times 11 + 6 \times 5}{18 \times 17},$$

pelo que a resposta fornecida no enunciado está correcta.

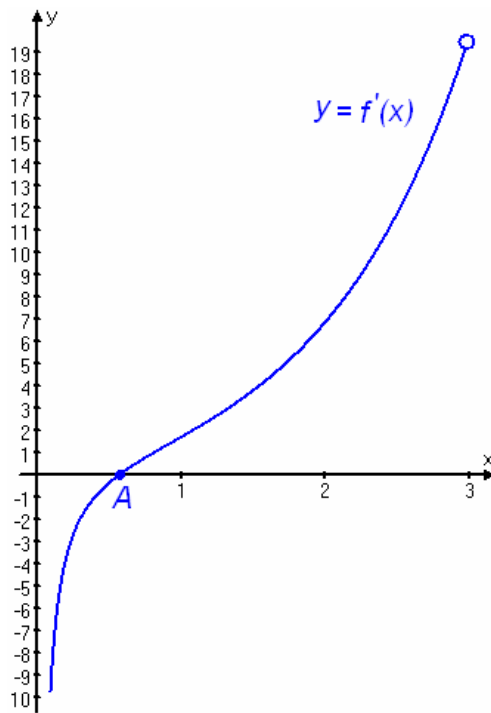
**4.1.** Tem-se  $N(t) = 24 \log_4(3t+1) - 8 \log_4(3t+1) = 16 \log_4(3t+1), \forall t \in [0,5]$

**4.2.** Para todo  $t \in [0,5]$  tem-se

$$N(t) = 24 \Leftrightarrow 16 \log_4(3t+1) = 24 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \log_4(3t+1) = 1,5 \Leftrightarrow 3t+1 = 8 \Leftrightarrow t = \frac{7}{3}$$

R: Foram necessárias 2 horas e 20 minutos.

5.



$A(a, 0)$

$a \approx 0,57$

$f'$  é negativa no intervalo  $]0, a[$ , logo  $f$  é estritamente decrescente em  $]0, a[$ .

$f'$  é positiva no intervalo  $]a, 3[$ , logo  $f$  é estritamente crescente em  $]a, 3[$ .

$f$  tem um mínimo em  $x = a$ .

6.1. Por definição de Assíntota Não Vertical:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [ax + b + e^x - (ax + b)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Assim,  $y = ax + b$  com  $a \neq 0$  é a equação de uma assíntota oblíqua do gráfico de  $f$ .

6.2.  $f$  é contínua sse  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ .

Tem-se que:

$$f(0) = b + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} - 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x)}{2x} = 1 - 2 \times 1 = -1$$

Logo  $f$  é contínua em 0 sse  $b + 1 = -1$ , ou seja,  $b = -2$

7.1.  $\widehat{OBA} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$  visto ser um ângulo inscrito numa semi-circunferência.

Usando as razões trigonométricas no triângulo rectângulo [OAB]:

$$\text{sen} \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2 \text{sen} \alpha$$



$$\cos \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OB} = 2 \cos \alpha .$$

Assim, o perímetro do triângulo [OAB] é dado por:

$$f(\alpha) = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{OB} = 2(1 + \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha), \forall \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ .$$

$$7.2. f'(\alpha) = 2(-\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha) = 2(\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha), \forall \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = \operatorname{sen} \alpha \wedge \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$\alpha$	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$	n.d.	+	0	-	n.d.
$f(\alpha)$	n.d.		Máx.		n.d.

Logo  $f$  atinge o máximo em  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

**FIM**