Proposta de Resolução da Sociedade Portuguesa de Matemática para o Exame Nacional de Matemática A Prova 635, 2ª fase – 27 de Julho de 2011

Grupo I

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Versão 1	B	D	B	D	A	C	B	C
Versão 2	C	A	C	A	B	D	B	B

Grupo II

1.

1.1

$$w=\frac{z_1\times i^{4n+3}-b}{\sqrt{2}cis\left(\frac{5}{4}\pi\right)}=\frac{(1+2i)\times\left(i^4\right)^n\times i^3-b}{\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right)+i\ sen\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right]}=\frac{(1+2i)(-i)-b}{\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}=\frac{-i-2i^2-b}{-1-i}=$$

$$=\frac{2-b-i}{-1-i}=\frac{[(2-b)-i](-1+i)}{(-1-i)(-1+i)}=\frac{-(2-b)+i+(2-b)i-i^2}{1+1}=\frac{-2+b+i+2i-bi+1}{2}=$$

$$=\frac{-1+b}{2}+\frac{(3-b)}{2}i.$$

O complexo w é um número real se e só se a sua parte imaginária é nula, ou seja, se $b=3$.

1.2

Tem-se

$$|1+z|^2+|1-z|^2=(1+z)\overline{(1+z)}+(1-z)\overline{(1-z)}=(1+z)\left(\bar{1}+\bar{z}\right)+(1-z)\left(\bar{1}-\bar{z}\right)=$$

$$=1+\bar{z}+z+z\times\bar{z}+1-\bar{z}-z+z\times\bar{z}=2|z|^2+1+1=4$$

uma vez que $z\times\bar{z}=|z|^2=1$.

2.

2.1 Sejam L e I os acontecimentos "ser licenciado" e "ter idade inferior a 40 anos" respectivamente.

Tem-se

$P(L)=0{,}6$ pelo que $P\left(\bar{L}\right)=1-0{,}6=0{,}4$.

Sabemos também do enunciado que:

$P(I\mid L)=0{,}8$

$P\left(I\mid\bar{L}\right)=0{,}1$.

Da definição de probabilidade condicionada vem

$$P(L \cap I) = P(L) \times P(I \mid L) = 0{,}48$$

$$P(\overline{L} \cap I) = P(\overline{L}) \times P(I \mid \overline{L}) = 0{,}4 \times 0{,}1 = 0{,}04,$$

pelo que $P(I) = P(L \cap I) + P(\overline{L} \cap I) = 0{,}48 + 0{,}04 = 0{,}52$.

Finalmente, a probabilidade de um funcionário escolhido ao acaso ser licenciado sabendo que tem idade não inferior a 40 anos é dada por

$$P(L \mid \overline{I}) = \frac{P(L \cap \overline{I})}{P(\overline{I})} = \frac{P(L) - P(L \cap I)}{1 - P(I)} = \frac{0{,}6 - 0{,}48}{1 - 0{,}52} = \frac{1}{4}.$$

2.2 A resposta correcta é a II. De facto, pretende-se que de entre os três funcionários escolhidos pelo menos dois estejam a favor do novo horário. Podemos decompor esta prerrogativa da seguinte forma:

- os três membros da equipa estão a favor. É possível formar ${}^{9}C_3$ destas equipas.
- dois e apenas dois membros da equipa estão a favor, estando o terceiro contra ou indeciso. Existem ${}^{6}C_1 \times {}^{9}C_2 = 6 \times {}^{9}C_2$ equipas nestas condições.

Sendo estas duas situações disjuntas, a resposta final é dada por: $6 \times {}^{9}C_2 + {}^{9}C_3$.

A resposta I não está correcta: o número de equipas de três elementos que se podem formar com 15 indivíduos é ${}^{15}C_3$. Por outro lado, existem ${}^{6}C_3$ equipas em que nenhum funcionário concorda com o novo horário de trabalho (estando portanto contra ou indeciso). Assim, a diferença ${}^{15}C_3 - {}^{6}C_3$ contabiliza o número de equipas em que pelo menos um elemento concorda com o novo horário. Esta resposta estaria correcta se a este número se subtraísse o número de equipas que contêm um e apenas um funcionário a favor, ou seja ${}^{6}C_2 \times 9$. Estaria portanto correcta a resposta ${}^{15}C_3 - {}^{6}C_3 - {}^{6}C_2 \times 9$.

3.

3.1. O aumento em questão é dado por:

$$N_A(7) - N_A(0) = \frac{120}{1 + 7 \times e^{-1{,}4}} - \frac{120}{1+7} \approx 29$$

O aumento foi de, aproximadamente, 29 nenúfares.

3.2.

$$N_A(t) = N_B(t) \quad \wedge \quad t \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{120}{1 + 7 \times e^{-0{,}2t}} = \frac{150}{1 + 50 \times e^{-0{,}4t}} \quad \wedge \quad t \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12\left(1 + 50e^{-0{,}4t}\right) = 15\left(1 + 7e^{-0{,}2t}\right) \wedge\ t \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 600(e^{-0{,}2t})^2 - 105e^{-0.2t} - 3 = 0 \wedge t \geq 0.$$

Definindo $x = e^{-0{,}2t}$ obtém-se a equação do 2º grau

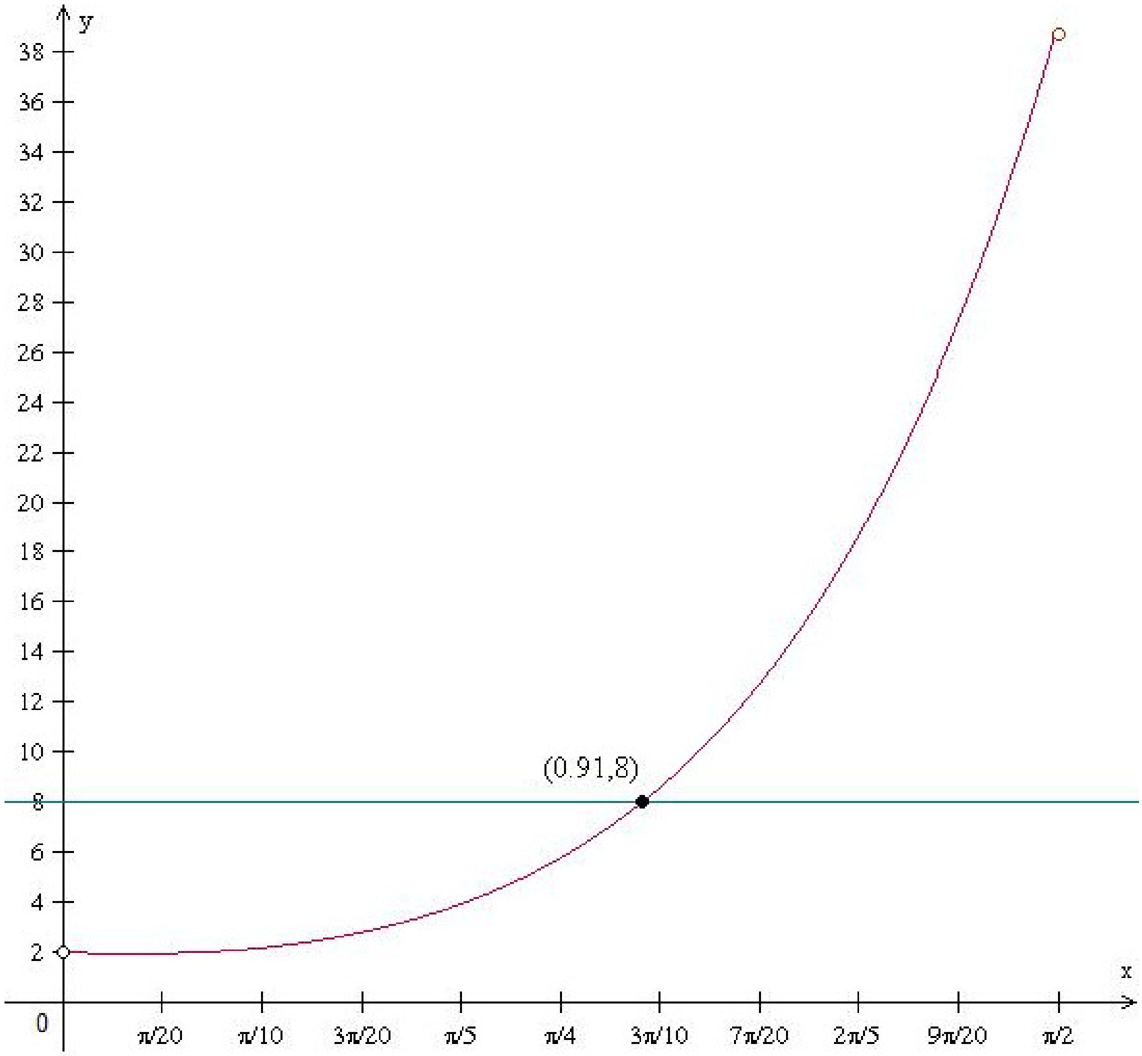
$600x^2 - 105x - 3 = 0$, cujas soluções são $x = \frac{1}{5}$ e $x = -\frac{1}{40}$ que correspondem em termos da variável *t*, a $e^{-0,2t} = \frac{1}{5}$ e $e^{-0,2t} = -\frac{1}{40}$.

Sendo a exponencial uma função positiva, a segunda equação não tem solução. Obtemos portanto

$e^{-0,2t} = \frac{1}{5} \wedge t \geq 0 \Leftrightarrow -0,2t = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \wedge t \geq 0 \Leftrightarrow t = 5\ln 5 \approx 8$.

Foram então necessários, aproximadamente, 8 dias.

4. $f'(x) = 8 \Leftrightarrow 2e^{2x} - senx - 4x = 8$



R: A abcissa do ponto B é aproximadamente 0,91.

5.

5.1. $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{e^{2-x} - 1}{x - 2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} -\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{e^{2-x} - 1}{2 - x} = -\lim\limits_{y \to 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = -1$, onde se fez a mudança de variável $y = 2 - x$. Sendo este limite finito não há A.V. quando $x \to 2^-$.

Por outro lado $\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{\ln(x+1)} = \frac{3}{\ln(3)} \in IR$, pelo que também não existe A. V. quando $x \to 2^+$.

$\therefore$ O gráfico de f não tem A. V. quando $x \to 2$.
$\therefore$ O gráfico de f não tem A. V. em $[0, +\infty[\setminus \{2\}$ pois f é contínua nesse conjunto.
$\therefore$ Assim o gráfico de f não tem A. V. em $[0, +\infty[$.

5.2. A função f é contínua em $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, pois f é contínua em $[0, 2[$. $\left(\left[0, \frac{1}{2}\right] \subset [0, 2[\right)$.

$f(0) = \frac{e^2 - 1}{-2} \approx -3{,}19$ e $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\frac{3}{2}} - 1}{-\frac{3}{2}} \approx -2{,}32$.

Logo $-3 \in \left]f(0), f\left(\frac{1}{2}\right)\right[$ e assim pelo Teorema de Bolzano $\exists\, c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[: f(c) = -3$.

5.3.

f é diferenciável em $]2, +\infty[$ e tem-se neste intervalo

$$f'(x) = \frac{(x+1)'\ln(x+1) - (\ln(x+1))'(x+1)}{(\ln(x+1))^2} = \frac{\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}(x+1)}{(\ln(x+1))^2} = \frac{\ln(x+1) - 1}{(\ln(x+1))^2}.$$

Para $x > 2$, $x+1 > 3 > e$ pelo que, sendo ln uma função crescente $\ln(x+1) > \ln e$, ou seja, $\ln(x+1) > 1$.
Assim, no intervalo considerado, $\ln(x+1) - 1 > 0$, $(\ln(x+1))^2$ >0.
Conclui-se que $f'(x) > 0$ em $]2, +\infty[$ logo f é estritamente crescente neste intervalo.

6. Tem-se para todo $x \in IR$
$f'(x) = -an\,sen(nx) + bn\cos(nx)$
e

$$f''(x) = -an^2\cos(nx) - bn^2 sen(nx) = -n^2(a\cos(nx) + b\,sen(nx)) = -n^2 f(x).$$

Desta forma, para qualquer $x \in IR$ tem-se $f''(x) + n^2 f(x) = 0$.