XXVII OPM - 2ª Eliminatória - 14.01.2009 - Categoria A - 8º/9º

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Considere-se igual a uma unidade a distância entre dois pontos consecutivos (horizontal ou verticalmente) da figura. O problema resume-se a estudar três casos:

   Se o centro da circunferência é um dos quatro vértices do quadrado de lado dois, então os raios podem ser $1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{5}$ ou $\sqrt{8}$. Logo, neste caso, há $4 \times 5 = 20$ circunferências diferentes.

   Se o centro da circunferência é o centro do quadrado de lado dois, então os raios podem ser 1 ou $\sqrt{2}$, logo, neste caso, há duas circunferências diferentes.

   Se o centro da circunferência é o ponto médio de um dos quatro lados do quadrado de lado dois, então os raios podem ser $1, \sqrt{2}, 2$ ou $\sqrt{5}$. Logo, neste caso, há $4 \times 4 = 16$ circunferências diferentes.

   Portanto, o número total de circunferências nas condições pedidas é $20 + 2 + 16 = 38$.

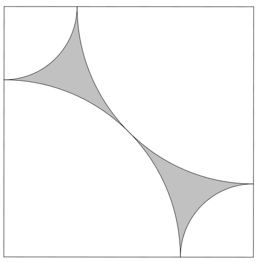
2. Os números que o Miguel escreve nas primeiras linhas são $1, 3, 7, 15, 13, 9, 19, 21, 7$. A partir deste momento, o Miguel escreve repetidamente o ciclo $7, 15, 13, 9, 19, 21$, que tem comprimento 6. Como $2009 = 6 \times 334 + 5$, o Miguel escreve na linha 2009 o mesmo número que escreveu na linha 5, ou seja, o número 13.

3. Seja d o número de páginas do discurso mais curto. Se um dos discursos ao seu lado tivesse mais do que d páginas, então o discurso do outro lado teria menos do que d páginas, pois d é a média aritmética destes dois números. Tal é impossível, porque d é o número mínimo de páginas dos discursos da mesa. Portanto, os dois discursos ao seu lado também têm d páginas. Aplicando repetidamente este raciocínio, conclui-se que todos os discursos têm d páginas, incluindo o discurso do Afonso.

   Como ao todo foram lidas 50 páginas, d é um divisor de 50, ou seja, $d = 1, 2, 5, 10, 25$ ou 50. No entanto, como há pelo menos três discursos (porque cada pessoa tem duas pessoas ao seu lado), os casos $d = 25$ e $d = 50$ não são possíveis. Portanto o discurso do Afonso tem $1, 2, 5$ ou 10 páginas.

4. Como o quadrado tem lado 4, pelo Teorema de Pitágoras, a sua diagonal mede $4\sqrt{2}$. Uma vez que os arcos de circunferência maiores passam pelo centro do quadrado, o seu raio é $2\sqrt{2}$. Assim, o raio dos arcos de circunferência menores é $4 - 2\sqrt{2}$.

   Solução 1: Considere-se a seguinte região, cuja área é metade da área pedida.
   A área desta região é a diferença entre a área do quadrado e a soma de metade da área de um círculo de raio $2\sqrt{2}$ com metade da área de um círculo de raio $4 - 2\sqrt{2}$, ou seja, é $4^2 - \frac{\pi(2\sqrt{2})^2}{2} - \frac{\pi(4-2\sqrt{2})^2}{2} = 16 - 16\pi + 8\sqrt{2}\pi$. Portanto a área pedida é $32 - 32\pi + 16\sqrt{2}\pi$ metros quadrados.



   Solução 2: A área pretendida é a diferença entre a área do quadrado e a soma da área de um círculo de raio $4 - 2\sqrt{2}$ com a área da região R assinalada a sombreado na figura.
   A soma das áreas dos quatro quartos de círculo maiores é igual à soma da área do quadrado com a área da região onde estes quartos de círculo se sobrepõem dois a dois, ou seja, com a área da região R. Por outro lado, esta soma é igual à área de um círculo de raio $2\sqrt{2}$. Assim, a área de R é $8\pi - 16$. Portanto a área pedida é igual a $16 - \pi(4 - 2\sqrt{2})^2 - (8\pi - 16) = 32 - 32\pi + 16\sqrt{2}\pi$ metros quadrados.