

*Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.*

1. Uma máquina do tempo tem dez interruptores, numerados de 1 a 10, que podem estar ligados ou desligados. Quando o interruptor n está ligado, a máquina faz avançar o tempo 2^{n-1} anos se n é ímpar; e faz recuar o tempo 2^{n-1} anos se n é par. Que interruptores devem ser ligados para que a máquina do tempo transporte um viajante para o ano 1500?
2. Determina todos os números naturais k tais que $\text{mmc}(6^6, 8^8, k) = 12^{12}$.
3. Seja $[ABC]$ um triângulo tal que $\hat{ABC} = \hat{BCA} = 40^\circ$ e D o ponto de intersecção da bissetriz de $\angle ABC$ com $[AC]$. Mostra que $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{AD}$.
4. Seja a_n a sucessão definida do seguinte modo: depois de ser dado a_1 , cada termo obtém-se somando uma unidade ao dobro da soma dos algarismos do termo anterior. Qual é o menor valor positivo para a_1 de modo que $a_4 \neq a_5$, mas $a_5 = a_6$?