OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

XXVII OPM - 2ª Eliminatória - 14.01.2009 - Categoria B - 10°/12°

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Pretende-se encontrar os interruptores que fazem a máquina do tempo recuar o viajante $2009 - 1500 = 509$ anos.

   Solução 1: Se o interruptor 10 ficasse desligado, o maior número de anos que se poderia recuar seria $2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^1 = 170 < 509$. Portanto, o interruptor 10 deverá ser ligado, o que fará a máquina recuar $2^9 = 512$ anos.

   Falta agora encontrar os interruptores que fazem a máquina do tempo avançar $512 - 509 = 3$ anos. Como 3 é ímpar e o interruptor 1 é o único que altera o tempo um número ímpar de anos, então este interruptor deverá ser ligado, o que fará a máquina avançar $2^0 = 1$ ano.

   Falta agora encontrar os interruptores que fazem a máquina do tempo avançar $3 - 1 = 2$ anos. Como o interruptor 2 é o único que não altera o tempo um número de anos múltiplo de 4, então este interruptor deverá ser ligado, o que fará a máquina recuar $2^1 = 2$ anos.

   Resta encontrar os interruptores que fazem a máquina do tempo avançar $2 + 2 = 4$ anos, o que se consegue com o interruptor 3.

   Portanto, para que a máquina faça recuar o tempo até ao ano 1500 devem ser ligados os interruptores $1, 2, 3$ e 10.

   Solução 2: A expressão de -509 na base -2 é $-509 = 1000000111$, ou seja,

$$-509 = (-2)^9 + (-2)^2 + (-2)^1 + (-2)^0.$$

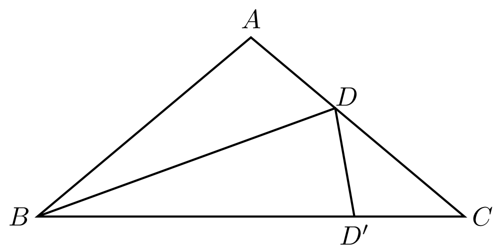
   Portanto, para que a máquina faça recuar o tempo até ao ano 1500 devem ser ligados os interruptores $1, 2, 3$ e 10.

2. Como k divide $12^{12} = 2^{24}3^{12}$, então $k = 2^a 3^b$, com $0 \leq a \leq 24$ e $0 \leq b \leq 12$. Ora,

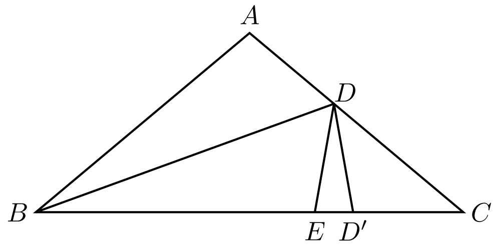
$$\text{mmc}(6^6, 8^8, k) = \text{mmc}(2^6 3^6, 2^{24}, 2^a 3^b) = 2^{\max(24,a)} 3^{\max(6,b)}.$$

   Logo, $\text{mmc}(6^6, 8^8, k) = 2^{24}3^{12}$ se e só se $\max(24, a) = 24$ e $\max(6, b) = 12$, ou seja, $0 \leq a \leq 24$ e $b = 12$. Portanto há 25 soluções para o problema, que são os naturais $k = 2^a 3^{12}$, com $0 \leq a \leq 24$.

3. Em primeiro lugar note-se que $C\hat{A}B = 180° - 40° - 40° = 100°$. De seguida considere-se o ponto D' pertencente a $[CB]$ tal que $\overline{BD'} = \overline{BD}$.
   Uma vez que BD é a bissectriz do ângulo $\angle ABC$ e a amplitude deste ângulo é $40°$, tem-se $D\hat{B}D' = 20°$. Além disso, $[DBD']$ é um triângulo isósceles, logo $D'\hat{D}B = B\hat{D'}D = 80°$. Assim, $D\hat{D'}C = 100°$ e, consequentemente, $D'\hat{D}C = 40°$. Deste modo, o triângulo $[D'DC]$ é isósceles, logo $\overline{CD'} = \overline{DD'}$. Uma vez que $\overline{BC} = \overline{BD'} + \overline{D'C} = \overline{BD} + \overline{DD'}$, resta provar que $\overline{DD'} = \overline{DA}$.



Solução 1: Considere-se o ponto E tal que $B\hat{E}D = 100°$.



Observe-se que os triângulos $[ABD]$ e $[EBD]$ são congruentes, logo $\overline{DE} = \overline{DA}$. Por outro lado, $D\hat{E}D' = 180° - B\hat{E}D = 80° = E\hat{D}'D$, logo o triângulo $[DED']$ é isósceles e $\overline{D'D} = \overline{DE}$. Assim, $\overline{DD'} = \overline{DA}$.

Solução 2: Como $D\hat{A}B + B\hat{D}'D = 180°$, conclui-se que o quadrilátero $[ABD'D]$ é cíclico, ou seja, está inscrito numa circunferência. Assim, $[DA]$ e $[DD']$ são cordas desta circunferência, definidas por ângulos inscritos com a mesma amplitude, por isso têm igual comprimento. Portanto, $\overline{DD'} = \overline{DA}$.

4. Se a_5 só tem um algarismo, então $a_6 = 2a_5 + 1 > a_5$; se a_5 tem $m \geq 3$ algarismos, então $a_6 \leq 2 \times 9m + 1 < 10^{m-1} \leq a_5$. Como $a_5 = a_6$, então a_5 tem dois algarismos. Seja $a_5 = 10a + b$, com $0 \leq a, b \leq 9$. Então, $a_6 = 2(a + b) + 1$ e, como $a_5 = a_6$ tem-se $8a = b + 1$, o que implica que $a = 1$ e $b = 7$. Portanto $a_5 = 17$ e $a_4 \neq 17$.

   Considerando todas as sucessões (a_n) nas condições do enunciado, sejam $t < u$ dois valores possíveis para o termo a_{k+1}. Sejam ainda r o menor valor para a_k tal que $a_{k+1} = t$ e s o menor valor para a_k tal que $a_{k+1} = u$. Como $t < u$, então a soma R dos algarismos de r é menor do que a soma S dos algarismos de s. Substituindo os algarismos de s por outros menores ou iguais pode-se encontrar um número com soma de algarismos R, logo $r < s$. Assim, nas condições do enunciado, se a_1 for o menor possível, então também a_2, a_3, a_4 são os menores possíveis.

   Para obter $a_5 = 17$, o termo a_4 pode ser qualquer número ímpar (diferente de 17) cuja soma dos algarismos é 8. O menor destes números é 35.

   Para obter $a_4 = 35$, o termo a_3 pode ser qualquer número ímpar cuja soma dos algarismos é 17. O menor destes números é 89.

   Para obter $a_3 = 89$, o termo a_2 pode ser qualquer número ímpar cuja soma dos algarismos é 44. O menor destes números é 89999.

   Para obter $a_2 = 89999$, o termo a_1 pode ser qualquer número cuja soma dos algarismos é 44999. O menor destes números é $899 \cdots 99$ (com 4999 algarismos 9).

   Portanto o menor valor positivo para a_1 é $\underbrace{899 \cdots 99}_{4999 \text{ algarismos}}$.