Proposta de Resolução da Sociedade Portuguesa de Matemática para o Exame Nacional de Matemática B

Prova 635, 1ª fase – 21 de Junho de 2012

GRUPO I

1. A partir do gráfico, construímos a seguinte tabela de frequências

Nº de Livros	Frequências Absolutas Acumuladas	Frequências Absolutas
0	5	5
1	20	15
2	35	15
3	60	25
4	75	15
5	80	5

Colocando os dados da primeira coluna na lista L_1 e os da última na lista L_2, obtemos por meio da calculadora que o valor mínimo é 0, o máximo é 5, o 1º quartil 1,5, a mediana 3 e o 3º quartil 3,5. Assim, $a = 0$; $b = 1{,}5$; $c = 3$; $d = 3{,}5$ e $e = 5$.

2. É óbvio que a variável aleatória X apenas toma os valores 1 e 3. Atendendo à planificação apresentada, $p(\text{“}sair\ quadrado\text{”}) = \frac{1}{3}$ e $p(\text{“}sair\ triângulo\text{”}) = \frac{2}{3}$. A distribuição é pois dada por

x_i	1	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

e $\mu_X = 1 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{2}{3} = \frac{7}{3} \approx 2{,}3$.

3.1 Coloquemos na lista L_3 os dados da primeira coluna e na lista L_4 os dados da segunda. Recorrendo à calculadora, obtemos a seguinte expressão para a função quadrática:

$$Y_1(x) = 0{,}0792x^2 + 0{,}0077x - 0{,}2999$$

e o valor pedido é $Y_1(15) \approx 17{,}6$.

3.2.1 Calculemos os 3 primeiros termos:

$$d_1 = 0$$

$$d_2 = 2$$

$$d_3 = 5$$

Como $d_3 - d_2 = 3 \neq 2 = d_2 - d_1$, conclui-se que a sucessão **<u>não</u>** é uma progressão aritmética.

3.2.2 Como d_n é o número de diagonais do polígono regular que corresponde à forma da peça de ordem n e esta peça tem a forma de um polígono regular com $n + 2$ lados, somos conduzidos à equação $n + 2 = 20$, donde $n = 18$ e o número pedido é o valor de d_{18}. Assim substituindo na sucessão o valor de *n* por 18, obtemos 170.

GRUPO II

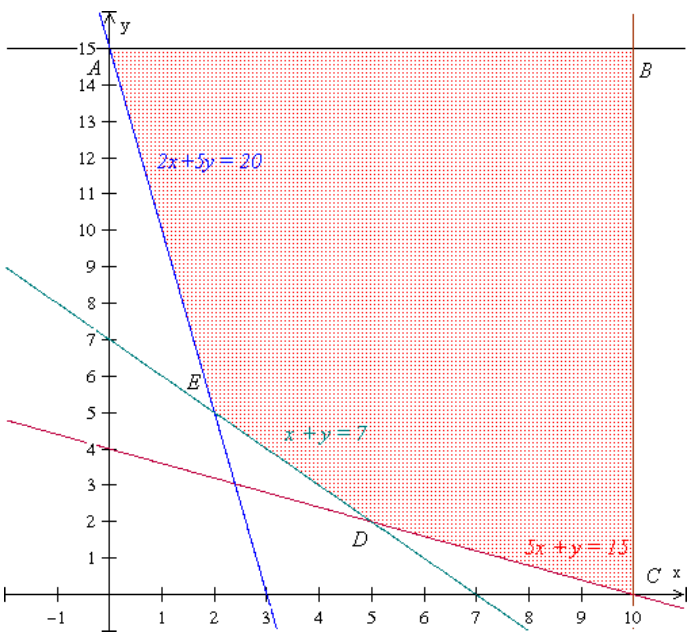
A função objectivo, que se pretende minimizar, é $L(x, y) = 5x + 2{,}5y$.

Quanto às restrições, a condição sobre os hidratos de carbono leva-nos a $30x + 75y \geq 300$, a condição sobre as vitaminas a $75x + 15y \geq 225$ e a condição sobre as proteínas a $45x + 45y \geq 315$.

Se tivermos em conta as restrições óbvias $x \geq 0, y \geq 0, x \leq 10$ e $y \leq 15$, obtemos, após simplificações,

$$\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x \leq 10 \\ y \leq 15 \\ 2x + 5y \geq 20 \\ 5x + y \geq 15 \\ x + y \geq 7 \end{cases}$$

Desta forma, a representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições é:



As coordenadas dos pontos *D* e *E*, obtidas resolvendo os sistemas

$\begin{cases} x+y=7 \\ 5x+y=15 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x+5y=20 \\ x+y=7 \end{cases}$ são respectivamente (5, 2) e (2, 5).

Calculemos o valor da função objectivo nos cinco vértices da região admissível:

$L(0,15) = 5 \times 0 + 2{,}5 \times 15 = 37{,}5$;

$L(10,15) = 5 \times 10 + 2{,}5 \times 15 = 87{,}5$;

$L(10,0) = 5 \times 10 + 2{,}5 \times 0 = 50$;

$L(5,2) = 5 \times 5 + 2{,}5 \times 2 = 30$;

$L(2,5) = 5 \times 2 + 2{,}5 \times 5 = 22{,}5$;

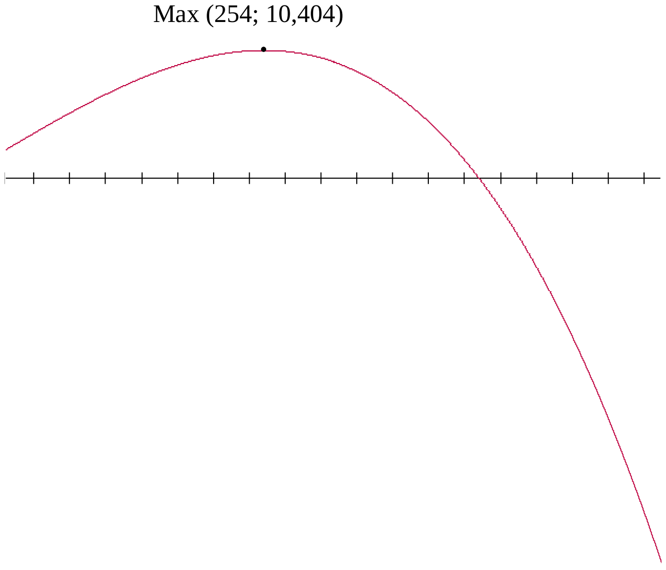
Desta forma, concluímos que o mínimo é 22,5, obtido no ponto *E*.

Assim, o suplemento deve conter 2 quilogramas de Granulado e 5 quilogramas de Farinha.

GRUPO III

1. 15 de Fevereiro é o 46º dia do ano. Devemos pois calcular $f(46) = 1{,}31856$ milhares de euros. Com a aproximação pedida, o valor é 1319 euros.

2. 1 de Julho é o 182º dia do ano. Pretendemos determinar o máximo de *f* no conjunto $\{182, 183, \ldots, 365\}$. Construindo, na calculadora, uma tabela (ou recorrendo a um gráfico) da função *f*, vem que o máximo é 10,404 milhares de euros, ou seja, 10404 euros, com a aproximação pedida.

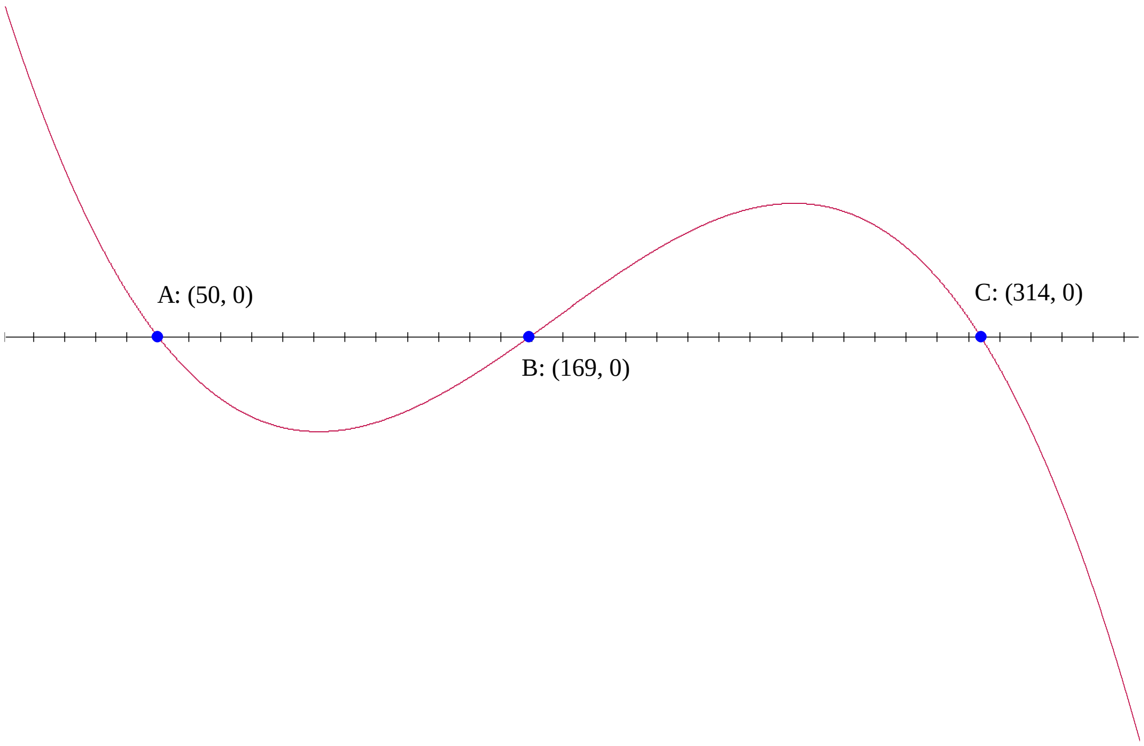


3. Vamos considerar a inequação $f(x) > g(x)$ no conjunto $\{1, 2, \dots, 365\}$.

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) > (1 - e^{0,005x-5x}) \times f(x) \Leftrightarrow f(x) - (1 - e^{0,005x-5x}) \times f(x) > 0$$

Pondo $f(x)$ em evidência e simplificando, vem $f(x)[e^{0,005x-5x}] > 0$. Como o factor dentro do parênteses recto é sempre positivo, temos de resolver apenas $f(x) > 0$.

Recorrendo de novo, ao gráfico da função $f(x)$, verifica-se que a função f é maior que zero de 1 a 49 (inclusive) e de 170 a 313 (inclusive).



Assim, o número de dias é $(49 - 1 + 1) + (313 - 170 + 1) = 193$.

GRUPO IV

1. A área de S_1 é a diferença entre as áreas do sector circular *GFE* e do triângulo rectângulo isósceles $[GFE]$. A primeira área é igual a $\frac{\pi r^2}{4}$ e a segunda a $\frac{r \times r}{2}$, pelo que a área de S_1 é $\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r \times r}{2} = \frac{\pi r^2 - 2r^2}{4}$.

Quanto a S_2, reparemos que a somas das áreas de S_1, S_2 e do triângulo rectângulo isósceles [*BGE*] é igual à área do sector circular *BDE*, que é igual a

$$\frac{\pi}{4} \times \frac{1}{2} \times (2r)^2 = \frac{\pi r^2}{2}.$$

Note-se que o segmento *BD* divide o setor *EBC* em duas partes iguais, uma vez que o ângulo *EBD* é um ângulo inscrito num arco de 90° e consequentemente mede 45°.

Como a área do triângulo [*BGE*] é $\frac{2r \times r}{2} = r^2$ segue-se que a área de S_2 é

$\frac{\pi r^2}{2} - r^2 - \frac{\pi r^2 - 2r^2}{4} = \frac{\pi r^2 - 2r^2}{4}$, como se pretendia.

2. Como a amplitude, em radianos, do ângulo *EBD* é $\frac{\pi}{4}$, segue-se que o comprimento do arco *ED* é $4 \times \frac{\pi}{4} = \pi$. Por outro lado, decorre do Teorema de Pitágoras que $\overline{EG} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$. Logo, $\overline{GD} = 4 - \sqrt{8}$. Temos ainda que o comprimento do arco *EG*, é um quarto do perímetro da circunferência de centro *F* e raio 2, ou seja, $\frac{4\pi}{4} = \pi$.

Desta forma, o perímetro pedido é

$$4 - \sqrt{8} + \pi + \pi \approx 7{,}45.$$

3.1 O domínio é $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

3.2 A expressão 8α representa a área do sector circular *BDC***,** já que esta é dada por $\alpha \times \frac{4^2}{2} = 8\alpha$.

Seja *X* o pé da perpendicular baixada de *D* sobre a recta *AC*. Tem-se que $\frac{\overline{DX}}{4} = \sin\alpha$ e consequentemente, $\overline{DX} = 4\sin\alpha$. Portanto a área do triângulo [*BDC*] é $\frac{\overline{BC} \times \overline{DX}}{2} = \frac{4 \times 4 \sin\alpha}{2} = 8\sin\alpha$. Finalmente, como o sector circular *BDC* é a união de S_3 com o triângulo [*BDC*], resulta que a área de S_3 é a diferença $8\alpha - 8\sin\alpha$, já que S_3 e o referido triângulo apenas têm em comum o segmento de recta [*CD*], que tem área nula.