Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. da República 45, 3º esq., 1050 – 187 Lisboa
Tel. 21 795 1219 / Fax 21 795 2349
www.spm.pt imprensa@spm.pt

21 de junho de 2012

Resolução da Sociedade Portuguesa de Matemática do Exame Nacional de Matemática do Ensino Básico – 3º ciclo

Prova 92, 1ª Fase – 21 de junho de 2012

1.1. Solução: 30%

1.2. Se identificarmos a tenda 1 como aquela em que dormem três jovens e a tenda 2 como a outra, então os casos possíveis podem ser identificados por $\{P1, P2\}$, $\{P1, E2\}$, $\{E1, P2\}$, $\{E1, E2\}$, $\{I1, P2\}$ e $\{I1, E2\}$ dos quais só $\{P1, P2\}$ e $\{E1, E2\}$ são favoráveis.

Logo, $P(\text{"}os\ dois\ jovens\ escolhidos\ terem\ a\ mesma\ nacionalidade\text{"}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2. Representando b o número compreendido entre 1 e a, então a média dos três números naturais é dada por $\frac{1+b+a}{3} = 11$. Consequentemente, $1 + b + a = 33 \Leftrightarrow b + a = 32$. Como b tem de ser menor do que a e superior a 1 então o menor valor possível para b é 2 pelo que o maior valor possível para a é 30.

3. Solução: $]-1,2]$

4. O oitavo termo é $[36,44]$

Observando os termos da sequência verifica-se que o extremo esquerdo de um termo é sempre a soma do extremo direito do termo anterior com 1. Por outro lado, a amplitude do intervalo é igual à ordem do termo. Assim, podemos escrever os próximos termos:

5.º Termo	**6.º Termo**	**7.º Termo**	**8.º Termo**
$[15, 20]$	$[21, 27]$	$[28, 35]$	$[36, 44]$

5. Solução: $\frac{1}{k}$

6. Solução: $x > -2$

7. 1. A expressão $(c+2)^2 - c^2$ representa a área da parte relvada pois $(c+2)^2$ representa a área da totalidade do terreno e c^2 representa a área da parte em cimento.

7.2. Resposta: Ponto G

8. $(x+2)^2 = 3x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 3x^2 + 2x \Leftrightarrow -2x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1+3}{2} \vee x = \frac{1-3}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

O conjunto solução é $\{-1{,}2\}$

9.

$$\begin{cases} x - \frac{y-1}{2} = 3 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - (y-1) = 6 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = 6 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ 3x - (2x - 5) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ x + 5 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

O conjunto solução é $\{(1,-3)\}$

10. Solução: “As variáveis x e y são inversamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é k.”

11. A função de proporcionalidade inversa representada graficamente tem constante 32 (4×8) pelo que pode ser descrita pela função $y = \frac{32}{x}$. Logo, como o ponto pedido tem abcissa 2 temos que:

$$y = \frac{32}{2} \Leftrightarrow y = 16\,.$$

12.1. O volume do cubo é dado, em cm^3, por a^3 . As dimensões do paralelepípedo, em cm, são dadas por $a = \overline{BE}$, $2a = \overline{AB}$ e $\frac{1}{3}a = \overline{BI}$ pelo que o volume será dado pelo seu produto, ou seja, $\frac{2}{3}a^3$. Assim, o volume do sólido é dado por $a^3 + \frac{2}{3}a^3$ pelo que o problema se equaciona por $a^3 + \frac{2}{3}a^3 = 25$ que é equivalente a $3a^3 + 2a^3 = 75 \Leftrightarrow a^3 = 15 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{15}$

Resposta: O valor exato de a é $\sqrt[3]{15}$

12.2. A reta IH

13.1. Como o $\Delta[ADE]$ é semelhante ao $\Delta[ABC]$ (uma vez que são ambos rectângulos e têm um ângulo em comum – ângulo de vértice em A) então $\frac{40}{\overline{AB}} = \frac{25}{20}$ pelo que $\overline{AB} = 32$.

Assim, pelo teorema de Pitágoras, tem-se que $\overline{BC}^2 = 40^2 - 32^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 576 \Leftrightarrow \overline{BC} = 24$.

13.2. Sabemos que o $\Delta[ABC]$ é rectângulo e que a amplitude do ângulo DAE é 37° logo temos que

$$B\hat{C}A = 180° - 90° - 37° = 53°$$

Por outro lado e uma vez que o ângulo PCQ é um ângulo inscrito no arco PCQ, temos que a amplitude do arco PQ é o dobro da amplitude do ângulo BCA, ou seja, $106°$.

Desta forma, concluímos que a amplitude do arco PCQ é dada por $360° - 106° = 254°$

Resposta: A amplitude, em graus, do arco PCQ é $254°$.

13.3. Solução: $\cos A\hat{C}B = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$

14. Solução: Planificação C