Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. da República 45 - 3ºesq., 1050–187 Lisboa
Tel. 21 795 1219 / Fax 21 795 2349
www.spm.pt imprensa@spm.pt

Proposta de Resolução da Sociedade Portuguesa de Matemática

para o Exame Nacional de Matemática A

Prova 635, 2ª fase – 19 de Julho de 2010

Grupo I

	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	C	B	D	A	D	C	B	A
Versão 2	B	C	A	D	A	B	C	D

Grupo II

1.1.

$$w=\frac{\left(\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^4+4i}{i}=\frac{4cis\pi+4i}{i}=\frac{-4+4i}{i}=\frac{-i(-4+4i)}{-i^2}=4+4i=4\left(\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=4\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

1.2. $|z-z_2|=r \Leftrightarrow |z-3|=\sqrt{5}$

C.A.:

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i$$

$P_1(1,1)$ e $P_2(3,0)$ são os afixos de z_1 e z_2 respectivamente. Assim,

$$r=d(P_1,P_2)=\sqrt{(3-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{5}$$

2.1. N.º casos possíveis $=6\times 6=36$

$P(X=-3)=\frac{1\times 1}{6\times 6}=\frac{1}{36}$; $P(X=-2)=\frac{1\times 1}{6\times 6}=\frac{1}{36}$; $P(X=-1)=\frac{4\times 1+1\times 5}{6\times 6}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$;

$P(X=0)=\frac{1\times 5}{6\times 6}=\frac{5}{36}$

$P(X=1)=\frac{4\times 5}{6\times 6}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

x	-3	-2	-1	0	1
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{9}$

2.2. $P(L \mid J)$, no contexto do problema, indica a probabilidade do ponto Q pertencer ao 3º quadrante sabendo que o número saído no dado A é negativo (ou seja, o ponto tem abcissa negativa).

Sabendo que o número saído no dado A é negativo o ponto pertencerá ao 2.º ou 3.º quadrantes consoante o número saído no dado B seja positivo ou negativo. Assim, como a probabilidade de sair negativo no dado B corresponde à probabilidade de sair face -1 no mesmo dado, que é $\frac{1}{6}$.

Portanto,

$P(L \mid J) = \frac{1}{6}$.

3.

$$\frac{P(A\cup B)}{P(B)} - P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}{P(B)} - P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)} + 1 - \frac{P(A\cap B)}{P(B)} - P(\overline{A} \mid B) =$$

$$= \frac{P(A)}{P(B)} + [1 - P(A \mid B)] - P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)} + P(\overline{A} \mid B) - P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)}.$$

4.1. Sendo $y = mx + b$ a equação da assimptota oblíqua do gráfico de f quando $x \to +\infty$, então:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{5}x - \ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{5} - \frac{\ln x}{x}\right) = \frac{1}{5} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \frac{1}{5}x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{5}x - \ln x - \frac{1}{5}x\right) = \lim_{x\to+\infty} (-\ln x) = -\infty,$$

logo o gráfico não tem assimptotas oblíquas.

4.2.

$f'(x) = \frac{1}{5} - \frac{1}{x}$, para $x > 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{5} \wedge x > 2 \Leftrightarrow x = 5$

x	2		5	$+\infty$
$f'(x)$	n.d.	-	0	+
$f(x)$	n.d.	↘	Mín.	↗

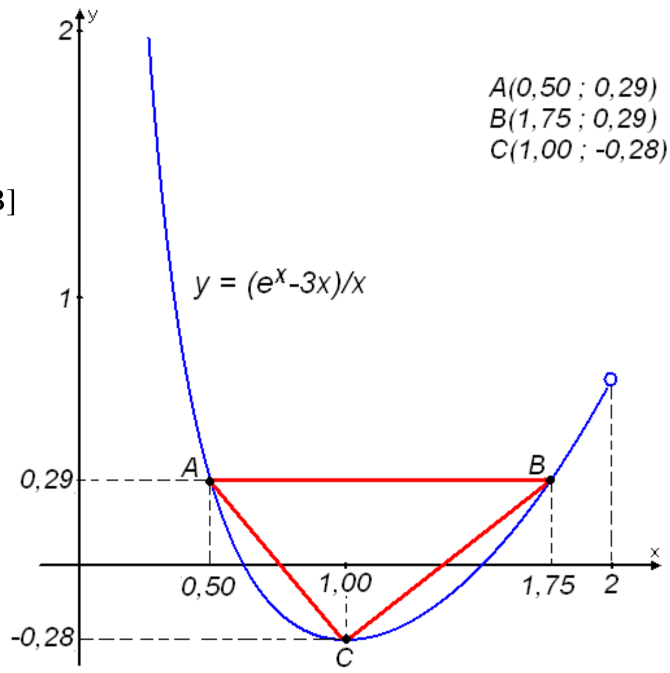
Assim, f tem um mínimo relativo em $x = 5$.

4.3. $f(15) = 3 - \ln 15 \approx 0{,}29$

$\overline{AB} \approx 1{,}75 - 0{,}50 = 1{,}25$

A altura do triângulo relativamente à base [AB] é dada por: $h \approx 0{,}29 - (-0{,}28) = 0{,}57$

Assim, a área do triângulo [ABC] é dada por: $A \approx \dfrac{1{,}25 \times 0{,}57}{2} \approx 0{,}4$ (aproximação às décimas).



5.1. f é contínua em IR, por ser a soma de funções contínuas, logo f é contínua em $[-2, -1]$.

$f(-2) = 2 + e^{-17} \approx 2{,}000$

$f(-1) = 1 + e^{-3} \approx 1{,}050$

$1{,}5 \in \left]f(-1), f(-2)\right[$ logo, pelo Teorema de Bolzano, $\exists c \in \left]-2,-1\right[: f(c) = 1{,}5$.

5.2. $f'(x) = -1 + 6x^2 e^{2x^3 - 1}$

$m = f'(0) = -1$

$f(0) = \dfrac{1}{e}$, logo $b = \dfrac{1}{e}$ e assim, $y = -x + \dfrac{1}{e}$ é equação reduzida da recta pedida.

6.1. Se $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $h(\theta) = \overline{AC} = \overline{AO} - \overline{CO} = 3 - 3\cos\theta$, pois $\dfrac{\overline{CO}}{3} = \cos\theta$. Por outro lado, se $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, $h(\theta) = \overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OC} = 3 + 3\cos(\pi - \theta) = 3 - 3\cos\theta$, pois $\dfrac{\overline{CO}}{3} = \cos(\pi - \theta)$.

Assim, $h(\theta) = 3 - 3\cos\theta, \forall \theta \in \left]0, \pi\right[$.

6.2. $h(\theta) = 3 \Leftrightarrow 3 - 3\cos\theta = 3 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$, pois $\theta \in \left]0, \pi\right[$.

Quando a altura do depósito é 3 metros o ângulo θ é $\frac{\pi}{2}$ radianos, isto é, a superfície do líquido passa pelo centro da esfera e, portanto, o volume do líquido é metade do volume total do depósito.